

Sinteza lucrării
realizată în cadrul Contractului IDEI-464/2009

Titlul proiectului: Abordări moderne ale problemei divergențelor în teoria cuantică a câmpului

Obiectivul etapei: Cauzalitate și unitaritate în teoria câmpului pe spații necomutative

Activitățile prevăzute pentru realizarea acestui obiectiv au cuprins cercetări privind: implementarea cauzalității pentru teoriile de câmp definite pe spații cu necomutativitate de tip Heisenberg, investigarea unitarității teoriilor de câmp necomutative și posibilitatea unei descrieri efective pentru gradele de libertate bilocale ale unei teorii necomutative. Principalele rezultate obținute pe baza acestor activități, comunicate în lucrările [1]-[7], constau din:

- Obținerea unei descrieri efective a teoriilor de câmp necomutative, bazate pe introducerea bilocalității gradelor de libertate elementare
- Identificarea simetriilor teoriei în această reprezentare a spațiului necomutativ
- Identificarea unui criteriu adecvat de cauzalitate și demonstrarea cauzalității și a unitarității teoriei
- Studiarea undelor radiale bilocale, care în limita comutativă corespund undelor fără simetrie radială
- Compactificarea unor teorii efective det tip string și generarea interacțiilor consistente dintre clase de câmpuri cu simetrii mixte

O alta activitate prevăzută pentru această etapă a cuprins studiul unor generalizări ale lemei Watson pentru seriile asimptotice și implicațiile lor în cromodinamica cuantică. Principalele rezultate obținute pe baza acestei activități, comunicate în lucrările [8]-[9], sunt:

- Demonstrarea unei generalizări a lemei Watson pentru serii asimptotice și descrierea ambiguităților teoriei de perturbație în cromodinamica cuantică
- Definirea unei noi serii de perturbație în cromodinamica cuantică și aplicarea ei pentru calculul cuplajului tare cuarc-gluon renormat.

Prezentăm în continuare problematica abordată și principalele rezultate obținute.

Introducere

Considerăm un câmp scalar ϕ depinzând de coordonatele spațio-temporale $x^0 = t, x^1, x^2, x^3$. Dacă aceste variabile independente au caracter operatorial, necomutând între ele,

$$\phi = \phi(\hat{x}^\mu), \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}(\hat{x}) \neq 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

teoria de câmp definită pe un astfel de spațiu se numește necomutativă. Motivațiile pentru utilizarea unor asemenea modele în fizica dincolo de modelul standard sunt multiple. Astfel, ele apar în mod natural în teoria stringurilor fundamentale în prezența unor fluxuri externe; de asemenea, permit o modelare a presupusei dispariții a structurii uzuale a spațiu-timpului în gravitația cuantică. Într-un context mai apropiat, există legături cu teoria efectului Hall cuantic. Nu în ultimul rând, aceste teorii prezintă interes intrinsec oferind posibilitatea deocamdată unică de a controla o teorie nelocală, oferind în același timp perspective interesante pentru eliminarea divergențelor din teoria cuantică a câmpului. Din motive tehnice, de obicei se consideră relații de comutare ce implică o pereche de coordonate spațiale,

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta I, \quad (2)$$

I fiind operatorul identitate iar θ o constantă având dimensiunea unei arii.

Deși literatura în domeniu este bogată, câteva probleme de principiu nu au fost rezolvate. Lipsește o descriere satisfăcătoare a excitațiilor uniparticulă. De asemenea, conceptul de cauzalitate nu este clar definit, în principal din cauza folosirii aproape exclusive a cuantificării Weyl-Moyal. Aceasta stabilește un izomorfism cu o teorie definită pe un spațiu abstract, al așa-numitelor simboluri ale lui Weyl. Produsul obișnuit a două funcții se modifică radical, devenind nelocal,

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow f(x) \star g(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \partial_\nu^y\right) f(x)g(y). \quad (3)$$

Correspondența cu spațiul fizic nu mai este decât statistică. Aceasta împiedică generalizarea satisfăcătoare a condiției de microcauzalitate din teoria uzuală a câmpului

$$[\phi(x), \phi(0)] = 0, \quad t^2 - \vec{x}^2 \leq 0, \quad (4)$$

având în vedere că nu se mai poate defini intervalul de tip spațial în mod univoc.

De asemenea, în cazul în care timpul este inclus în algebra necomutativă, apar probleme în demonstrarea unitarității teoriilor necomutative.

Toate aceste trei probleme pot fi rezolvate satisfăcător prin introducerea reprezentării bilocale a gradelor de libertate fundamentale, o consecință naturală a implementării cuantificării canonice.

Bilocalitate

Ilustrăm cuantificarea canonică pe cazul relevant al unui câmp scalar (2+1)-dimensional $\Phi(t, \hat{x}, \hat{y})$, \hat{x} și \hat{y} satisfăcând (2). Operatorii \hat{x} și \hat{y} acționează pe spațiul Hilbert \mathcal{H} de tip oscilator armonic în modul uzual. Putem alege pe acest spațiu o infinitate de baze, de exemplu baza discretă $\{|n\rangle\}$ formată din stările proprii ale operatorului $\hat{x}^2 + \hat{y}^2$ [2], sau baza continuă $\{|x\rangle\}$ a stărilor proprii ale operatorului \hat{x} [1,3].

Cuantificăm pe Φ impunând coeficienților dezvoltării sale Fourier, a și a^* , să devină operatori de creere \hat{a} și anihilare \hat{a}^\dagger pe spațiul Fock \mathcal{F} standard. Transformăm spațiul geometric într-unul necomutativ înlocuind exponențialele $e^{i(k_x x + k_y y)}$ cu operatorii corespunzători. Câmpul rezultat

$$\Phi = \int \int \frac{dk_x dk_y}{2\pi \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[\hat{a}_{k_x k_y} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - k_x \hat{x} - k_y \hat{y})} + \hat{a}_{k_x k_y}^\dagger e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - k_x \hat{x} - k_y \hat{y})} \right]. \quad (5)$$

este un operator ce acționează pe un produs direct de două spații Hilbert, $\Phi : \mathcal{F} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$. Saturăm acțiunea lui Φ asupra spațiului \mathcal{H} , lucrând cu cantitățile $\langle x' | \Phi | x \rangle : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. *Bilocalitatea* apare la nivelul ”undelor plane operatoriale” datorită egalității

$$\langle x' | e^{i(k_x \hat{x} + k_y \hat{y})} | x \rangle = e^{ik_x(x + k_y \theta/2)} \delta(x' - x - k_y \theta) = e^{ik_x \frac{x+x'}{2}} \delta(x' - x - k_y \theta). \quad (6)$$

Vedem că $\langle x' | \Phi | x \rangle$ descrie un grad de libertate fundamental caracterizat prin extensia $(x' - x) = \theta k_y$, și satisface relația de dispersie modificată

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k_x^2 + \frac{\Delta x^2}{\theta^2} + m^2}, \quad (7)$$

m fiind masa ce apare în funcția Lagrange. În acest mod, din fiecare pereche de coordonate ce nu comută, una se elimină în mod natural. Se obține un spațiu redus, pe care însă excitațiile au caracter bilocal. Ecuațiile (5) și (6) implică

$$\langle x' | \Phi | x \rangle = \int \frac{dk_x}{2\pi \sqrt{2\omega_{k_x, k_y}}} \left[\hat{a}_{k_x, k_y} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - k_x \frac{x+x'}{2})} + \hat{a}_{k_x, -k_y}^\dagger e^{-i(\omega_{\vec{k}} t + k_x \frac{x+x'}{2})} \right] \quad (8)$$

unde $k_y = (x' - x)/\theta$. Acest operator nu mai este local.

Teorie efectivă

Introducem notația $\langle x'|\phi|x \rangle \equiv \phi(x', x) \equiv \phi(\bar{x}, \Delta x)$, $\bar{x} \equiv \frac{x+x'}{2}$ fiind centrul dipolului, iar $\Delta x \equiv (x' - x)$ extensia sa. Ecuațiile operatoriale ale propagării undelor libere se scriu, pentru $\phi(t, \hat{x}, \hat{y}, z)$,

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2 + m^2)\phi + \frac{1}{\theta^2}[\hat{y}, [\hat{y}, \phi]] + \frac{1}{\theta^2}[\hat{x}, [\hat{x}, \phi]] = 0, \quad (9)$$

dat fiind că (2) cere

$$[\hat{x}, \phi(\hat{x}, \hat{y})] = i\theta \frac{\partial \phi}{\partial \hat{y}}, \quad [\hat{y}, \phi(\hat{x}, \hat{y})] = -i\theta \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}}. \quad (10)$$

Acțiunea este deci

$$S_0 = Tr_H \int dt \int dz \{ (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{\theta^2}[\hat{x}, \phi]^2 + \frac{1}{\theta^2}[\hat{y}, \phi]^2 - (\partial_z \phi) \}, \quad (11)$$

formal singura schimbare fiind înlocuirea integralelor $\int dx \int dy$ cu trasa Tr_H . Trecând la $\langle x'|\phi|x \rangle \equiv \phi(x', x) \equiv \phi(\bar{x}, \Delta x)$, obținem

$$[\partial_t^2 - \partial_{\bar{x}}^2 - \partial_z^2 + \frac{(x' - x)^2}{\theta^2} + m^2]\phi(x, x') = 0. \quad (12)$$

pentru un dipol (2+1)-dimensional, t, \bar{x}, z și de lungime Δx . În cazul cu interacție se adaugă la funcția Lagrange termenul de potențial pentru ϕ , $V(\phi)$, de pildă $V = \lambda\phi^4$.

Este importantă studierea simetriilor sistemului în reprezentarea introdusă. Avem invarianță la boost-uri în lungul axei \bar{x} , dar și a axei z , în mod independent. Aceasta decurge din caracterul tensorial al lui $\theta \equiv \theta_{xy} \sim xy$, cuplat cu transformarea Lorentz uzuală pentru Δx . Aceasta se întâmplă în contradicție cu simetria $O(2)$ din planul $x - y$ și simetria Lorentz $O(1, 1)$ exclusiv pentru $t - z$, din tratarea de tip Moyal.

Se pune de asemenea întrebarea: ce forma are ecuația Schrödinger pentru doi dipoli cu capetele la x_1, x_2 , respectiv x_3, x_4 , în particular cum descriem funcția de undă și mai ales potențialul de interacție "biparticulă",

$$\psi = \psi(x_1, x_2; x_3, x_4), \quad V = V(x_1, x_2; x_3, x_4). \quad (13)$$

În cazul comutativ, introducerea unui cuplaj linear (de tip $J\phi$) cu două surse J_1 and J_2 conduce la un potențial de interacție efectiv între acestea

$$V_{eff}(J_1, J_2) = \int d^4x \int d^4y J_1(x) iG(x - y) J_2(y), \quad (14)$$

$G(x-y)$ fiind propagatorul liber. Pentru două surse statice, localizate la \vec{x}_0 , respectiv \vec{y}_0 , se obține potențialul de tip Yukawa $V = \pi \frac{e^{-m|\vec{x}_0-\vec{y}_0|}}{|\vec{x}_0-\vec{y}_0|}$. În cazul necomutativ, localizarea și pe coordonata y nu mai are sens, dar are sens specificarea extensiilor dipolilor. În cazul cuplajului liniar, ambii dipoli trebuie să aibă aceeași extensie pentru a interacționa, și potențialul de interacție ia forma [1]

$$V_{eff}(J_1, J_2) \sim H_0^{(1)}(\sqrt{x^2 + z^2} \times \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\theta^2} + m^2}). \quad (15)$$

x, z dau separarea centrilor dipolilor, Δx lungimea (comună a) acestora, $H_0^{(1)}$ fiind funcția lui Hankel de speța întâi, cu comportamentul la infinit $H_0^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i(x-\pi/4)}$. Observăm ca potențialul de interacție depinde doar de distanța relativă în spațiul redus și de o singură extensie. Cazul cuplajului neliniar nu mai poate fi acoperit în mod natural cu conceptele primei cuantificări, necesitând metodologia uzuală a teoriei câmpurilor.

Cauzalitate și unitaritate

În reprezentarea canonică, un dipol (1 + 1)-dimensional rezultă dintr-o teorie necomutativă 2 + 1-dimensională. În cazul liber, efectul extensiei nu se simte, dipolul comportându-se ca o particulă liberă dar cu relația de dispersie modificată. Introducerea interacțiilor duce la cuplarea extremităților dipolilor și manifestarea bilocalității. Astfel, ne-am aștepta ca un argument perturbativ să fie necesar pentru demonstrarea proprietăților ce se manifestă în timpul interacțiilor, de pildă cauzalitatea și unitaritatea. Este însă remarcabil că aceste două proprietăți pot fi demonstrate prin argumente generale, în reprezentarea pe care am construit-o mai sus. Unitaritatea devine evidentă, dat fiind că timpul a rămas comutativ. Se poate de asemenea demonstra și pentru cazul în care timpul nu comută cu una din coordonate, demonstrându-se astfel superioritatea metodei noastre față de abordarea de tip Moyal.

În ceea ce privește cauzalitatea, să considerăm anularea comutatorului

$$[\phi(t_1, \bar{x}_1), \phi(t_2, \bar{x}_2)] = 0, \quad (16)$$

$\bar{x}_1 = \frac{x_1+x'_1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{x_2+x'_2}{2}$ fiind pozițiile centrelor de masă ale celor doi dipoli. Vrem ca (16) să fie satisfăcută atunci când distanța spațio-temporală dintre centrele dipolilor este un interval de tip spațial, anume

$$(t_1 - t_2)^2 - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \leq 0. \quad (17)$$

Ecuatiile (16, 17) sunt însă totuna cu a cere

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0, \quad \vec{x} \neq \vec{y}, \quad (18)$$

cu condiția ca un boost de-a lungul axei x să poată fi aplicat, pentru a egaliza cei doi timpi care apar în (16). Am arătat însă mai sus ca teoria dipolului (1 + 1)-dimensional este invariantă la transformările Lorentz dorite. Ecuatiile (16, 17) sunt astfel echivalente cu

$$e^{iH't}[\phi(0, \vec{x}), \phi(0, \vec{y})]e^{-iH't} = 0 \quad (19)$$

unde H' reprezintă partea de interacție a Hamiltonianului (altminteri arbitrar) în cazul reprezentării de interacție, sau întreg Hamiltonianul în cazul reprezentării Heisenberg. Ecuatia (19) este însă adevărată fie la timpul $t = -\infty$, când dipolii se presupun a fi la distanță mare și liberi, fie la un timp oarecare t_0 , dacă se *alege* la acel timp dat o configurație cauzală (de pildă condițiile inițiale). Astfel, am demonstrat că putem implementa în mod consistent următorul criteriu de cauzalitate:

Adaugând și coordonata comutativă z , criteriul de cauzalitate obținut este

$$[\phi(t_1, \vec{x}_1, z_1), \phi(t_2, \vec{x}_2, z_2)] = 0, \quad (t_1 - t_2)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \leq 0, \quad (20)$$

și este satisfăcut în teoria necomutativă a câmpului. Remarcăm că am eliminat o singură coordonată (axa y), spre deosebire de abordările anterioare ale cauzalității, care erau nevoite să scoată din joc ambele coordonate necomutative.

LSZ și relații de dispersie

Caracteristica unei teorii cauzale este existența relațiilor de dispersie. Pentru demonstrarea acestora în teoria cuantică, s-a dovedit că cea mai convenabilă cale este introducerea reprezentării Low-LSZ. Aceasta exprimă partea nontrivială a elementului de matrice S_{if} ca o funcție de operatorii de interpolare. Într-o experiență de împrăștiere înainte a unei particule de cuadri-impuls k^μ pe una de cuadri-impuls p^μ (și stare $|p \rangle$), definind comutatorul retardat a doi operatori A și B prin

$$R(A(x)B(y)) = \theta(x_0 - y_0)[A(x), B(y)]$$

și curentul $j(x)$ via $j \equiv (\square + m^2)\phi$, avem

$$T_{if} \sim \int d^4x e^{ik_0 - i\vec{k}\vec{x}} \langle p | Rj(x/2)j(-x/2) | p \rangle \equiv \int dr T(k_0, r). \quad (21)$$

Vrem să demonstrăm analiticitatea lui $T(k_0, r)$ pentru $\Im k_0 > 0$. Or, cauzalitatea comutatorului retardat impune neanularea sa doar pentru $x_0 > r$ (nu discutăm

aici problemele de convergență), care implică imediat această analiticitate datorită exponențialelor din (21). În cazul necomutativ, singura modificare apare în expresiile intermediare pentru operatorii de creere și anihilare în funcție de operatorii de interpolare,

$$\hat{a}_k = i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} (e^{ikx} \partial_0 \phi - \phi \partial_0 e^{ikx}). \quad (22)$$

Modificarea constă în înlocuirea integralei tridimensionale cu una doar după coordonata comutativă, urmată de trasa pe spațiul Hilbert H . Se demonstrează [3] că această înlocuire nu pune probleme. De asemenea, forma finală a formulei (21) devine mai puțin explicită datorită lipsei simetriei sferice. Analicitatea pentru $\Im k_0 > 0$ rămâne însă valabilă, și ca atare și relațiile de dispersie ce decurg imediat din aceasta.

Teorii efective generalizate

Descrierea efectivă care rezultă din integrarea unei părți a gradelor de libertate caracteristice, este utilizată în mod frecvent în teoriile de tip string. În această direcție, în cadrul acestei etape s-a investigat compactificarea teoriilor care rezultă prin integrarea câmpurilor masive din acțiunea unor stringuri cu simetrie $SU(2)$ sau $SU(3)$ [4,5]. Utilizând principiile de simetrie, s-a investigat și problema construirii de interacții consistente în cadrul unor teorii efective generalizate. Metoda aplicată a constatat în deformării acțiunii BRST și a permis demonstrarea existenței unor interacții netriviiale între clase de câmpuri tensoriale cu simetrii mixte [6,7]. Rezultatele sunt importante deoarece majoritatea rezultatelor obținute în acest cadru pentru alte clase de câmpuri sunt teoreme de tip "no-go".

Serii asimptotice și ambiguitățile teoriei perturbațiilor

Majoritatea teoriilor de câmp de interes fizic au o serie de perturbație renormată divergentă, cu raza de convergență zero. Pentru a da seriei de perturbație un sens precis, Dyson a propus interpretarea ei ca serie asimptotică pentru funcția pe care o reprezintă. Prin aceasta, filozofia teoriei de perturbație s-a schimbat radical, în sensul că termenii seriei calculați din diagramele Feynman nu pot prezice în mod unic funcțiile Green și observabilele fizice. Aceasta pune probleme de ordin practic pentru teoriile de etalonare neabeliene ce compun Modelul Standard al particulelor.

Pornind de la caracterul divergent al teoriei de perturbație, în cadrul etapei s-a demonstrat o generalizare a lemei Watson pentru serii asimptotice. Mai exact, dacă G este o funcție arbitrară suficient de netedă iar $f(u)$ este olomorvă într-un disc de rază nenulă, $|u| < R$, și este măsurabilă pe curba $u = G(r)$, atunci orice reprezentare

integrală de forma

$$\Phi_{b,c}^{(G)}(\lambda) = \int_{r=b}^c e^{-\lambda(G(r))^\alpha} (G(r))^{\beta-1} f(G(r)) dG(r). \quad (23)$$

admite reprezentarea asimptotică

$$\Phi_{0,c}^{(G)}(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (24)$$

pentru $\lambda \rightarrow \infty$ într-un anumit domeniu [8].

Acest rezultat are implicații importante asupra metodelor de resumare folosite în prezent în cromodinamica cuantică, relevand ambiguitatea termenilor de tip putere care se adaugă în general pentru completarea seriei calculate pe baza diagramelor Feynman. În cadrul fazei s-a arătat că unitaritatea și analiticitatea care rezultă din cauzalitate pot reduce în mod considerabil ambiguitatea metodelor de resumare.

În această direcție, un alt rezultat important obținut în cadrul fazei constă în definirea unei noi serii de perturbație în cromodinamica cuantică (QCD), care reproduce coeficienții calculați în ordine joase din diagramele Feynman, și în același timp descrie în mod corect comportarea seriei în ordine înalte. Forma noii serii, ilustrată în cazul particular al funcției Adler în cromodinamica de masă nulă este

$$\hat{D}(s) = \sum_{n \geq 0} d_n W_n(s), \quad (25)$$

unde coeficienții d_n se calculează din diagramele Feynman iar funcțiile $W_n(s)$ sunt definite ca

$$W_n(s) = \frac{1}{\beta_0} \text{PV} \int_0^\infty e^{-u/(\beta_0 a_s(s))} w^n du, \quad (26)$$

unde $a_s(s)$ este cuplajul renormat la scara s , iar variabila conformă $w = w(u)$ aplică prima foaie Riemann a planului Borel pe discul unitate $|w| < 1$ [9]. Studii numerice detaliate au arătat că noua serie reproduce foarte bine modele fizice utilizate în literatură. Pe baza ei s-a obținut o determinare foarte precisă a cuplajului tare din dezintegrările hadronice ale leptonului τ . Rezultatul $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.320_{-0.009}^{+0.011}$, raportat în [8], este consistent cu alte determinări recente din literatură, dar are o bază teoretică mult mai solidă.

Lucrări realizate:

1. C. Acatrinei, Effective description of bilocal field theories, acceptată la Rom. J. Phys.
2. C. Acatrinei, Bilocal radial waves on noncommutative spaces, trimisă la publicare
3. C. Acatrinei, Causality in noncommutative field theories, în curs de finalizare
4. J. Louis, D. Martinez-Pedrer, A. Micu, Heterotic compactifications on SU(2)-structure backgrounds, Journal of High Energy Physics (JHEP) 0909 (2009) 012
5. A. Micu, Moduli Stabilisation in Heterotic Models with Standard Embedding, acceptata la Journal of High Energy Physics (JHEP)
6. C. Bizdadea, E. Ciobircă, S.O. Saliu, M.E. Babalic, Dual linearized in D=6 coupled to a purely spin-two field of mixed symmetry (2,2), acceptata la Fortschritte der Physik
7. C. Bizdadea, S.O. Saliu, M. Babalic, Self-interactions in collections of massless tensor fields with the mixed symmetry (3,1) and (2,2), Physics Annals of the University of Craiova, **19**, I (2009) 1-21. (revista CNCSIS categoria B)
8. I. Caprini, J. Fischer, I. Vrkoč, On the ambiguity of field correlators represented by asymptotic perturbation expansions, J. Phys. **A42** 395403 (2009).
9. I. Caprini, J. Fischer, α_s from τ decays: contour-improved versus fixed-order summation in a new QCD perturbation expansion, European Physical Journal C 64 (2009) 35