

Coexistența proprietăților clasice și cuantice în cadrul modelului stării coerente

I. INTRODUCERE

Într-o teorie a mai multor corpuri, definirea gradelor de libertate este de o importanță supremă. Mai mult decât atât, tratarea mișcării lor și cuplării cu coordonate ne colective nu reprezintă o problemă ușoară. Unele formalisme folosesc o metodă variațională dependentă de timp care de fapt oferă o descriere semiclassicală în cadrul căreia calculul este semnificativ simplificat [1,2]. Metoda decuantificării este cea mai sigură atunci când starea variațională este de natură coerentă. Într-adevăr, în această situație cuantificând traiectoriile clasice, spectrul rezultat ar putea fi apropiat de cel asociat cu Hamiltonianul inițial pentru mai multe corpuri. O astfel de tratare poate fi aplicată deasemenea Hamiltonienilor bosonici cvadрупolari [3,4].

Proprietatea completă a stării coerente permite determinarea dinamicii responsabile de mișcarea colectivă. Într-adevăr, dezvoltând funcția coerentă într-o bază a spațiului Hilbert, nici un coeficient al dezvoltării nu dispare. Datorită acestei proprietăți, pentru un Hamiltonian bosonic cvadрупolar contribuțiile în întreg spațiul bosonic la valorile sale proprii sunt incluse, ceea ce nu se întâmplă atunci când este adoptată o metodă de diagonalizare. Drept urmare, această proprietate a fost fructificată când o stare axial deformată de natură cvadрупolară a fost folosită să genereze, printr-o proiecție a momentului cinetic, o mulțime de stări care descriu destul de bine principalele caracteristici ale stărilor rotaționale din banda fundamentală [5]. Această idee a fost extinsă considerând două excitații polinomiale ortogonale ale stării coerente, fiecare dintre ele fiind ortogonale pe stare fundamentală. Prin definiție, restricția de ortogonalitate a celor trei stări deformate este păstrată și după ce proiecția este realizată. Cele două mulțimi suplimentare de stări proiectate au caracteristici care sunt specifice stărilor componente ale benzilor β , respectiv, γ . În spațiul restrâns al stărilor bosonice generate de cele trei mulțimi de stări proiectate după momentul cinetic, este tratat un Hamiltonian bosonic efectiv. Formalismul, numit modelul stării coerente (CSM), a fost aplicat cu succes pentru a descrie proprietățile energiilor de excitație și ale probabilităților de tranzițiilor $E2$ pentru un număr mare de nuclee [6].

În lucrarea de față, încercăm să răspundem la câteva întrebări privind comportarea clasică a unui sistem bosonic descris de o stare proiectată dintr-o stare coerentă.

Starea coerentă are proprietatea de a minimiza relațiile de incertitudine, care de fapt definesc caracterul clasic al stării. Starea coerentă rupe câteva simetrii, care pot fi restabilite prin metode de proiecție. Ridicăm întrebarea dacă sau nu prin restabilirea simetriei comportarea clasică este afectată. Răspunsul la această întrebare este formulat în funcție de abaterea relațiilor de incertitudine de limita clasică.

Relațiile de incertitudine Heisenberg sunt asociate cu o pereche dată de coordonate conjugate. Al doilea aspect adresat în această lucrare este dacă proprietățile clasice sau neclasice predomină în funcție de coordonatele conjugate alese. În concluzie, ne propunem studierea efectului restabilirii simetriei asupra relațiilor de incertitudine Heisenberg asociate la două perechi distincte de coordonate conjugate.

Obiectivele acestei lucrări vor fi prezentate conform următorului plan. În Cap. II sunt prezentate proprietățile de bază ale unei stări coerente axial deformată. Relațiile de incertitudine pentru coordonatele conjugate $(\hat{\alpha}, \hat{\pi})$ sunt scrise pentru stările neproiectate, proiectate după moment cinetic, și proiectate după moment cinetic plus simetrie gauge, în Cap. III. Același studiu, dar pentru operatorul număr bosonic și faza sa conjugată, este realizat în Cap. IV. Analiza numerică prezentată în Cap. V privește considerarea cantitativă a ecuațiilor deduse în capitolele precedente. Concluziile finale sunt cuprinse în Cap. VI.

II. STAREA COERENTĂ AXIAL DEFORMATĂ

Considerăm starea coerentă definită cu componenta z a operatorilor bosonici cvadrupolari $b_{2\mu}^\dagger, b_{2\mu}$ cu $-2 \leq \mu \leq 2$:

$$|\Psi\rangle = e^{(db_{20}^\dagger - d^*b_{20})}|0\rangle, \quad (2.1)$$

unde $|0\rangle$ desemnează starea de vid bosonică, în timp ce d este un număr complex. Natura coerentă a acestei funcții este determinată de

$$b_{20}|\Psi\rangle = d|\Psi\rangle, \quad \langle\Psi|b_{20}^\dagger = d^*.. \quad (2.2)$$

Folosind factorizarea Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (2.3)$$

starea coerentă este scrisă în forma

$$|\Psi\rangle = e^{-\frac{|d|^2}{2}} e^{db_{20}^\dagger}|0\rangle. \quad (2.4)$$

Media operatorului cvadrupolar,

$$Q_{20} = q_0 \left(b_{20}^\dagger + b_{20} \right), \quad (2.5)$$

unde starea coerentă are expresia

$$\langle \Psi | Q_{20} | \Psi \rangle = 2q_0 \text{Re } d. \quad (2.6)$$

Funcția $|\Psi\rangle$ este stare de vid pentru operatorul bosonic cvadrupolar deplasat

$$(b_{20} - d) |\Psi\rangle = 0. \quad (2.7)$$

Evident, funcția $|\Psi\rangle$ nu are un moment cinetic definit; asta înseamnă, că nu este funcție proprie a operatorului moment cinetic la pătrat, \hat{J}^2 . Totuși, este funcție proprie a lui \hat{J}_z . Datorită acestei proprietăți spunem că $|\Psi\rangle$ este o funcție axial deformată. De remarcat că Ec. (2.6) afirmă că $\text{Re } d$ joacă rolul de parametru de deformare.

Pentru d real funcția de undă $|\Psi\rangle$ a fost folosită ca funcție generatoare pentru stările benzii rotaționale fundamentală [5-7]. În plus, construind două stări reciproc ortogonale (ca excitații polinomiale de ordin mic ale lui $|\Psi\rangle$), fiecare dintre ele fiind ortogonale pe $|\Psi\rangle$, și punând condiția ca cele trei stări intrinseci să satisfacă un număr de criterii sugerate de datele experimentale s-a generat, prin proiecție a momentului cinetic, stările componente ale benzilor β , respectiv, γ . În spațiul bosonic restrâns a fost definit un Hamiltonian bosonic efectiv. În fapt, acestea sunt ingredientele principale ale modelului stării coerente [6], care a fost cu succes folosit pentru descrierea, într-o manieră realistă, a proprietăților energiilor de excitație și ale tranzițiilor $E2$.

Pentru că dorim să discutăm proprietățile clasice care ar putea fi descrise cu CSM restrângem discuțiile la cazul lui d real.

III. COORDONATA CVADRUPOARĂ ȘI IMPULSUL CONJUGAT CORESPUNZĂTOR

A. Stare neproiectată

Coordonatele conjugate

$$\hat{\alpha}_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{20}^\dagger + b_{20}), \quad \hat{\pi}_{20} = \frac{i}{\sqrt{2}} (b_{20}^\dagger - b_{20}), \quad (3.1)$$

satisfac ecuația

$$[\hat{\alpha}_{20}, \hat{\pi}_{20}] = i, \quad (3.2)$$

unde cu i se notează unitatea imaginară. Convențional, folosim sistemul unitate în care $\hbar = 1$.

Mediile lui $\hat{\alpha}$ și $\hat{\alpha}^2$ pe $|\Psi\rangle$ sunt

$$\langle \Psi | \hat{\alpha}_{20} | \Psi \rangle = \sqrt{2}d, \quad \langle \Psi | \hat{\alpha}_{20}^2 | \Psi \rangle = 2d^2 + \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Impulsul conjugat și pătratul său au mediile

$$\langle \Psi | \hat{\pi}_{20} | \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi | \hat{\pi}_{20}^2 | \Psi \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Folosind aceste rezultate, relația de incertitudine asociată coordonatelor conjugate α și π are forma:

$$\Delta \hat{\alpha}_{20} \Delta \hat{\pi}_{20} = \frac{1}{2}, \quad (3.5)$$

unde cu Δx este notată dispersia coordonatei x . De remarcat că produsul dispersiei atinge valoarea minimă a mulțimii permise de principiul de incertitudine Heisenberg. Datorită acestei proprietăți afirmăm că starea coerentă $|\Psi\rangle$ este starea optimă de a descrie proprietățile ce definesc marginea dintre comportarea cuantică și cea clasică.

După cum deja am menționat, stare coerentă nu are un moment cinetic definit. Întrebarea este dacă proprietățile clasice descrise de $|\Psi\rangle$ sunt păstrate când simetria la rotație este restabilită, i.e., dacă din starea deformată se proiectează componentele unui moment cinetic definit. O măsură a abaterii de la comportamentul clasic este din nou deplasarea produsului dispersiei de la valoarea clasică. Acest lucru va fi exprimat analitic în următorul subcapitol.

B. Stări sferice proiectate

Printr-o proiecție a momentului cinetic se generează o mulțime de stări ortogonale

$$\phi_{JM}^{(g)} = N_J^{(g)} P_{M0}^J |\Psi\rangle, \quad (3.6)$$

unde cu P_{MK}^J se notează operatorul de proiectare a momentului cinetic

$$P_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int D_{MK}^{J*}(\Omega) \hat{R}(\Omega) d\Omega, \quad (3.7)$$

cu D_{MK}^{J*} notând funcția Wigner, sau matricea de rotație, și unde $\hat{R}(\Omega)$ este rotația definită de unghiurile Euler Ω , în timp ce $N_J^{(g)}$ este constanta de normare. Funcțiile proiectate conțin principalele proprietăți ale benzii rotaționale fundamentale [6]. Din acest motiv, funcția este însoțită de indicele superior $^{(g)}$. Normele au fost studiate analitic pentru fiecare deformare și, suplimentar, au fost obținute formule foarte simple pentru regimurile aproape vibrațional și bine deformat [8]. Pentru motive de exhaustivitate oferim expresiile necesare

$$\left(N_J^{(g)} \right)^{-2} = (2J+1) I_J^{(0)} e^{-d^2}, \quad (3.8)$$

cu

$$I_J^{(k)}(x) = \int_0^1 P_J(y) (P_2(y))^k e^{xP_2(y)} dy, \quad x = d^2, \quad (3.9)$$

unde $P_k(x)$ sunt polinoamele Legendre de ordin k . Valorile așteptate ale coordonatelor conjugate și pătratele lor au formele

$$\begin{aligned} \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{\alpha} | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= \sqrt{2} d C_{M0M}^{J2J} C_{000}^{J2J}, \\ \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{\alpha}^2 | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} + d^2 \\ &\times \left[\sum_{J'=0,2,4} C_{M0M}^{JJ'J} C_{000}^{JJ'J} \left(C_{000}^{22J'} \right)^2 + \sum_{J'=0,2,4} \left(C_{000}^{J'2J} \right)^2 \left(C_{M0M}^{J'2J} \right)^2 \left(\frac{N_J^{(g)}}{N_{J'}^{(g)}} \right)^2 \right], \\ \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{\pi} | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= 0, \\ \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{\pi}^2 | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} + d^2 \\ &\times \left[- \sum_{J'=0,2,4} C_{M0M}^{JJ'J} C_{000}^{JJ'J} \left(C_{000}^{22J'} \right)^2 + \sum_{J'=0,2,4} \left(C_{000}^{J'2J} \right)^2 \left(C_{M0M}^{J'2J} \right)^2 \left(\frac{N_J^{(g)}}{N_{J'}^{(g)}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Este folosită aici notația standard, $C_{m_1, m_2, m}^{j_1, j_2, j}$, pentru coeficienții Clebsch-Gordan. Pornind de la aceste relații, dispersiile lui $\hat{\alpha}$ și $\hat{\pi}$ sunt obținute ușor și apoi produsul dispersiei este exprimat analitic.

C. Restabilire simultană a simetriilor de rotație și de gauge

Operatorul proiecției numărului bosonic este

$$\hat{P}_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\phi(\hat{N}-N)} d\phi. \quad (3.11)$$

Aplicând succesiv operatorii de proiectare P_{MK}^J și \hat{P}_N pe funcția coerentă $|\Psi\rangle$, obținem o stare de moment cinetic și număr bosonic bun

$$|NJM\rangle = \mathcal{N}_{NJ} \hat{P}_N P_{MK}^J |\Psi\rangle. \quad (3.12)$$

Se noteaza aici cu \mathcal{N}_{NJ} constanta de normare a cărei expresie este

$$(\mathcal{N}_{NJ})^{-2} = e^{-d^2} \frac{d^{2N}}{N!} (2J+1) \mathcal{S}_{NJ}, \quad (3.13)$$

unde matricea \mathcal{S}_{mJ} este definită de

$$\mathcal{S}_{mJ} = \int_0^1 (P_2(x))^m P_J(x) dx. \quad (3.14)$$

Urmând pașii indicați în Ref. [5] se obține

$$\mathcal{S}_{lJ}(d) = \sum_{m=0}^l \frac{(-)^{l-m} 3^m (l)! (2m)! (m + \frac{1}{2}J)!}{2^{l-J} m! (l-m)! (m - \frac{1}{2}J)! (2m + J + 1)!}. \quad (3.15)$$

Elementele de matrice date mai sus satisfac următoarea restricție: sunt nenule doar dacă $l \leq J/2$.

Expresia explicită a stării proiectate este

$$|NJM\rangle = \mathcal{N}_{NJ} e^{-d^2/2} \frac{d^N}{N!} \frac{2J+1}{8\pi^2} \int D_{M0}^{J*}(\Omega) \hat{R}(\Omega) \left(b_{20}^\dagger\right)^N d\Omega |0\rangle, \quad (3.16)$$

unde $\hat{R}(\Omega)$ este rotația definită de unghiurile Euler Ω .

Valorile așteptate ale variabilelor conjugate $\hat{\alpha}_{20}$ și $\hat{\pi}_{20}$ sunt egale cu zero deoarece fiecare dintre termenii constituenți schimbă numărul bosonic cu o unitate. Prin urmare, dispersiile corespunzătoare la pătrat sunt chiar valorile medii ale pătratelor lor. Prin calcule directe se obține

$$\Delta \hat{\alpha}_{20} \Delta \hat{\pi}_{20} = \frac{1}{2} + \sum_{J'=0,2,4} \left(C_{M0M}^{J'2J}\right)^2 \left(C_{000}^{J'2J}\right)^2 d^2 \left(\frac{\mathcal{N}_{NJ}}{\mathcal{N}_{(N-1)J'}}\right)^2. \quad (3.17)$$

IV. RELAȚIA DE INCERTITUDINE PENTRU NUMĂRUL BOSONIC ȘI FAZA SA CONJUGATĂ

A. Cazul stării intrinseci

În acest subcapitol considerăm din nou că d este un număr complex. Notăm cu \hat{N}_0 operatorul număr bosonic

$$\hat{N}_0 = b_{20}^\dagger b_{20}. \quad (4.1)$$

Scriind operatorul \hat{N}_0^2 în ordine normală, valorile așteptate pentru \hat{N}_0 și \hat{N}_0^2 pot fi ușor calculate ca

$$\langle \Psi | \hat{N}_0 | \Psi \rangle = |d|^2 \equiv N_0, \quad \langle \Psi | \hat{N}_0^2 | \Psi \rangle = |d|^2 + |d|^4. \quad (4.2)$$

Astfel dispersia operatorului număr bosonic poate fi ușor calculată ca

$$(\Delta \hat{N})^2 = |d|^2 \equiv N_0.. \quad (4.3)$$

Scriind numărul complex d în formă polară

$$d = |d| e^{i\varphi}. \quad (4.4)$$

și folosind Ec. (2.2) se obține

$$\langle \Psi | b_{20} | \Psi \rangle = |d| e^{i\varphi} = N_0^{1/2} e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \langle \Psi | b_{20} | \Psi \rangle \left(\langle \Psi | \hat{N}_0 | \Psi \rangle \right)^{-1/2}. \quad (4.5)$$

. Întrebarea care apare este dacă o astfel de factorizare este valabilă și pentru operatori a căror medii sunt conținute în ecuația de mai sus. Înainte de a trece la problema mecanicii cuantice a numărului bosonic și a fazei sale conjugate am dori să prezentăm mai întâi partea clasică a acestei lungi probleme.

Definim H , un Hamiltonian exprimat în funcție de operatorii bosonici cvadrupolari b_{2m}^\dagger, b_{2m} cu $-2 \leq m \leq 2$ și considerăm ecuația principiului variațional dependent de timp (TDVP)

$$\delta \int_0^t \langle \Psi | H - i \frac{\partial}{\partial t'} | \Psi \rangle dt' = 0, \quad (4.6)$$

unde starea variațională este funcția coerentă $|\Psi\rangle$ (2.2), cu d un număr complex dependent de timp. TDVP conduce la ecuațiile Hamilton de mișcare pentru coordonatele clasice d și d^*

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d} = -i \dot{d}^*, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d^*} = i \dot{d}, \quad (4.7)$$

unde cu \mathcal{H} se notează media lui H cu $|\Psi\rangle$, în timp ce $\dot{}$ indică derivata temporală. Schimbând coordonatele clasice prin transformarea

$$(d, d^*) \rightarrow (r, \varphi), \quad (4.8)$$

cu $r = |d|^2$, ecuațiile de mișcare devin

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = \dot{r}. \quad (4.9)$$

Aceste ecuații sugerează că imaginea clasică (media lui \hat{N}_0 cu $|\Psi\rangle$) a operatorului număr bosonic și a fazei φ sunt într-adevăr coordonatele clasice conjugate; anume, r este o coordonată clasică și φ impulsul sau conjugat. Putem verifica dacă paranteza lor Poisson este egală cu unitatea. Deisgur, ar fi de dorit ca o pereche de operatori Hermitici al căror comutator este unu să existe astfel încât mediile lor cu $|\Psi\rangle$ să fie chiar coordonatele canonice clasice conjugate r și φ . În cele ce urmează vom discuta mai în detaliu acest aspect formulat mai sus.

Este utilă introducerea operatorului off-diagonal

$$\hat{P}_0^\dagger = \hat{N}_0^{-1/2} b_{20}^\dagger. \quad (4.10)$$

care este echivalentul cuantic al Ec. (4.5). Operatorul $\hat{N}_0^{-1/2}$ este definit de următoarea ecuație

$$\hat{N}_0^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-x^2 \hat{N}_0\right). \quad (4.11)$$

Operatorul Hermitic conjugat \hat{P}_0 , satisface relația de comutare

$$\left[\hat{P}_0, \hat{N}\right] = \hat{P}_0.. \quad (4.12)$$

Coordonata conjugată corespunzătoare operatorului număr bosonic este

$$\hat{\Phi}_0 = -i \ln \hat{P}_0.. \quad (4.13)$$

Într-adevăr, considerând dezvoltarea în serie de puteri ale lui $(\hat{P}_0 - 1)$ a funcției \ln , se observă că operatorii \hat{N}_0 și $\hat{\Phi}_0$ satisfac relația de comutare

$$\left[\hat{N}_0, \hat{\Phi}_0\right] = i.. \quad (4.14)$$

Pentru bosoni monopolari, coordonatele conjugate ale numărului bosonic și fazei au fost descrise în detaliu în Ref. [9]. Spre deosebire de cazul monopolar aici simetria de rotație este ruptă. Într-adevăr, în timp ce operatorul număr bosonic este un scalar, operatorul fazei \hat{P} este un tensor de rang doi și proiecție zero. Este un subiect deschis dacă este posibilă sau nu o construcție a unui operator al fazei scalar \hat{P} .

Mnționăm că deducerea operatorului fazei este bazată pe Ec. (4.12). De fapt, această ecuație poate fi privită ca o ecuație de definiție a lui \hat{P}_0 . Cu siguranță că soluția acestei ecuații nu este unică. De exemplu, o soluție posibilă este

$$\hat{P}_0 = b_{20}. \quad (4.15)$$

În acest caz avem

$$\hat{\Phi}_0 = -i \ln b_{20}. \quad (4.16)$$

Putem verifica că următoarele ecuații pentru valorile așteptate sunt satisfăcute

$$\langle \Psi | \hat{\Phi}_0 | \Psi \rangle = -i \ln d, \quad \langle \Psi | \hat{\Phi}_0^2 | \Psi \rangle = -(\ln d)^2. \quad (4.17)$$

Drept urmare, dispersia corespunzătoare se anulează

$$\Delta \hat{\Phi}_0 = 0, \quad (4.18)$$

ceea ce reflectă faptul că $|\Psi\rangle$ este o funcție proprie a lui $\hat{\Phi}_0$:

$$\hat{\Phi}_0 |\Psi\rangle = -i (\ln d) |\Psi\rangle. \quad (4.19)$$

O folosire directă a Ec. (4.13) pentru a calcula relația de incertitudine pentru numărul bosonic și fază reprezintă o problemă destul de greoaie, în special datorită funcției logaritmice. Totuși, o simplificare considerabilă este obținută ținând cont că deviația lui $\hat{\Phi}_0$ de la valoarea sa așteptată poate fi exprimată ca

$$\hat{\Phi}_0|\Psi\rangle = -i(\ln d)|\Psi\rangle. \quad (4.20)$$

Definim o nouă dispersie a operatorului fazei prin

$$D\hat{\Phi}_0 = \frac{\Delta\hat{P}_0}{\langle\Psi|\hat{P}_0|\Psi\rangle}. \quad (4.21)$$

Vom demonstra [9] ca mărimea nou definită satisface relația de incertitudine Heisenberg. Într-adevăr, urmând procedura din Ref. [10], obținem succesiv

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{P}_0|\Psi\rangle &= de^{-|d|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d|^{2k}}{k!\sqrt{k+1}}, \\ \langle\Psi|\hat{P}_0^2|\Psi\rangle &= d^2e^{-|d|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d|^{2k}}{k!\sqrt{(k+1)(k+2)}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

. În zona asimptotică a lui $|d|$, au fost obținute forme compacte pentru sumele implicate în ecuația de mai sus [11], astfel încât expresiile finale pentru valorile așteptate considerate sunt

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{P}_0|\Psi\rangle &= \frac{d}{|d|} \left[1 - \frac{1}{8|d|^2} + \dots \right], \\ \langle\Psi|\hat{P}_0^2|\Psi\rangle &= \frac{d^2}{|d|^2} \left[1 - \frac{1}{2|d|^2} - \frac{3}{8|d|^4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

. Cu aceste rezultate găsim că, pentru valori mari ale lui $|d|$, următoarea relație de incertitudine este verificată:

$$\Delta\hat{N}_0D\hat{\Phi}_0 = \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

După cum vom arăta în cele ce urmează, această ecuație este valabilă în regiunea unui număr mare de bosoni. Într-adevăr, în regiunea lui $|d|$ mare termenii componenți Ψ cu ponderi mari sunt cei corespunzători unui număr bosonic mare.

Relația de incertitudine a operatorului număr bosonic și a fazei sale conjugate a fost prima dată studiată pentru fotoni de către Dirac [12] și pentru oscilatori de către Susskind și Glover [13]. Ecuațiile de mai sus au fost obținute reprezentând operatorul de anihilare fonic ca un produs al unui operator unitar, scris ca $U = e^{i\phi}$,

și o funcție auto-adjunctă a operatorului număr bosonic $f(N)$. Soluția este $f = \hat{N}^{1/2}$ și este bazată pe presupunerea că ϕ este un operator auto-adjunct. Mai târziu s-a demonstrat că variabila fazei conjugate nu este bine definită și astfel relația de incertitudine corespunzătoare este îndoielnică. Într-adevăr, putem observa că operatorul U nu este unitar și, drept urmare, ϕ nu este un operator auto-adjunct și astfel nu poate fi asociat unei observabile fizice [11]. Motivul pentru neunitaritate îl constituie prezența unui număr bosonic nul în spectrul lui \hat{N} . Chiar dacă excludem această valoare, care-l împiedică pe \hat{N} să fie inversabil, faza nu este bine definită pentru valori mici ale lui N [14]. Într-adevăr, notând cu $|n_0\rangle$ stările proprii ale lui \hat{N}_0 , se găsește că elementele de matrice ale Ec. (4.14) conduc la

$$\langle n_0 | \hat{\Phi}_0 | m_0 \rangle = i \frac{\delta_{n_0, m_0}}{n_0 - m_0}, \quad (4.25)$$

care nu are sens pentru valori mici ale numărului bosonic. Totuși, pentru valori mari ale numărului bosonic acesta poate fi asimilat cu o variabilă continuă, iar raportul din partea dreaptă a Ec. (4.25) este exact prima derivată a funcției Dirac δ , care este o mărime bine definită.

Încercări reușite de a defini operatori Hermitici ce depind de fază, care împreună cu operatorul bosonic \hat{N}_0 satisfac relația de incertitudine, au fost realizate de câțiva autori [10,11,14,15]. Astfel, operatorii

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{2}(\hat{P}_0 + \hat{P}_0^\dagger), \quad \hat{S}_0 = \frac{1}{2i}(\hat{P}_0 - \hat{P}_0^\dagger) \quad (4.26)$$

sunt Hermitici și satisfac relațiile de incertitudine [10]

$$\Delta \hat{N}_0 \Delta \hat{S}_0 \geq \frac{1}{2} \langle \hat{C}_0 \rangle, \quad \Delta \hat{N}_0 \Delta \hat{C}_0 \geq \frac{1}{2} \langle \hat{S}_0 \rangle, \quad (4.27)$$

. unde cu $\langle \dots \rangle$ se notează media operatorului implicat, cu starea coerentă. Limitarea asupra măsurătorii simultane a observabilelor S_0 și C_0 asociate cu operatorii Hermitici mai sus menționați este exprimată de produsul de incertitudine

$$(\Delta \hat{S}_0)(\Delta \hat{C}_0) \geq \frac{1}{4} e^{-N_0}, \quad (4.28)$$

cu N_0 notându-se pătratul dispersiei $\Delta \hat{N}_0$. O relație de incertitudine mai simetrică în regimul lui $|d|$ mare este obținută prin combinarea rezultatelor deja obținute:

$$(\Delta \hat{N}_0)^2 \frac{(\Delta \hat{C}_0)^2 + (\Delta \hat{S}_0)^2}{(\langle \hat{C}_0 \rangle)^2 + (\langle \hat{S}_0 \rangle)^2} \geq \frac{1}{4}. \quad (4.29)$$

Deși aici folosim bosoni cvadrupolari demonstrația relațiilor de incertitudine menționate mai sus urmează identic liniile celor date în Ref. [10,11].

De observat că în timp ce mediind operatorul număr bosonic cu funcția coerentă $|\Psi\rangle$ doar componenta $b_{20}^\dagger b_{20}$ dă o contribuție nenulă, când media este efectuată cu starea proiectată după momentul cinetic toți termenii în expresia operatorului număr bosonic dau contribuție. Prin urmare în acest caz numărul bosonic \hat{N}_0 va fi înlocuit cu operatorul număr total bosonic

$$\hat{N} = \sum_{-2 \leq m \leq 2} b_{2m}^\dagger b_{2m} \quad (4.30)$$

Operatorul de fază \hat{P} care satisface relația de comutare

$$[\hat{P}, \hat{N}] = \hat{P}, \quad (4.31)$$

are expresia

$$\hat{P} = \sum_{-2 \leq m \leq 2} b_{2m} \hat{N}^{-1/2}, \quad (4.32)$$

unde operatorul de sub radical este definit ca în Ec. (4.11). În același spirit și cu precauție similară ca și înainte operatorul fazei conjugate este

$$\hat{\Phi} = -i \ln \hat{P}. \quad (4.33)$$

Valorile așteptate ale operatorului număr bosonic \hat{N} și pătratului său \hat{N}^2 au fost obținute analitic într-o publicație anterioară a unuia dintre autori (AAR) [5]:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{N} | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= |d|^2 \frac{I_J^{(1)}}{I_J^{(0)}}, \\ \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{N}^2 | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= |d|^2 \frac{I_J^{(1)}}{I_J^{(0)}} + |d|^4 \frac{I_J^{(2)}}{I_J^{(0)}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Putem verifica că rapoartele integralelor "overlap" conținute în ecuațiile de mai sus sunt date de [6,8]:

$$x^2 \frac{I_J^{(2)}}{I_J^{(0)}} = \frac{1}{2} x(x-3) \frac{I_J^{(1)}}{I_J^{(0)}} + \frac{1}{4} (2x^2 + J(J+1)), \quad ; \quad x = |d|^2. \quad (4.35)$$

Din aceste ecuații se obține dispersia lui \hat{N} :

$$\left(\Delta \hat{N} \right)_J = -|d|^4 \left(\frac{I_J^{(1)}}{I_J^{(0)}} \right)^2 + \frac{1}{2} |d|^2 (|d|^2 - 1) \frac{I_J^{(1)}}{I_J^{(0)}} + \frac{1}{4} (2|d|^4 + J(J+1)). \quad (4.36)$$

Relațiile de incertitudine vor fi calculate așgând ca operator conjugat operatorul fazei \hat{P} împărțit la valoarea mediei sale [9] și alternativ operatorii Hermitici \hat{C} și \hat{S} definiți ca și înainte [10]:

$$\hat{C} = \frac{1}{2} (\hat{P} + \hat{P}^\dagger), \quad \hat{S} = \frac{1}{2i} (\hat{P} - \hat{P}^\dagger). \quad (4.37)$$

În cele ce urmează vom descrie o metodă de calculare a dispersiei operatorului faza asociat \hat{P} . Media lui \hat{P} corespunzătoare stării proiectate după momentul cinetic $|\Phi_{JM}^{(g)}\rangle$. Aplicând o metodă similară dar pentru \hat{P}^2 , se obține rezultatul final:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{P} | \phi_{JM}^{(g)} \rangle &= \left(N_J^{(g)} \right)^2 \langle \Psi | P_{M0}^{J\dagger} \sum_{\mu} b_{2\mu} P_{M0}^J \hat{N}^{-1/2} | \Psi \rangle \\ &= e^{-\frac{|d|^2}{2}} \left(N_J^{(g)} \right)^2 \langle \Psi | P_{M0}^{J\dagger} \sum_{\mu} b_{2\mu} P_{M0}^J \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-)^m x^{2m}}{m!} \hat{N}^m d^n \frac{b_{20}^{\dagger n}}{n!} dx | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{|d|^2}{2}} \left(N_J^{(g)} \right)^2 \langle \Psi | P_{M0}^{J\dagger} \sum_{\mu} b_{2\mu} P_{M0}^J \frac{1}{\sqrt{n}} d^n \frac{b_{20}^{\dagger n}}{n!} | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{d^2}{2}} C_{M0M}^{J2J} C_{000}^{J2J} \left(N_J^{(g)} \right)^2 \langle \Psi | P_{00}^J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{\sqrt{n}} \frac{\left(b_{20}^{\dagger} \right)^{n-1}}{(n-1)!} | 0 \rangle \\ &= d e^{-|d|^2} C_{M0M}^{J2J} C_{000}^{J2J} \left(N_J^{(g)} \right)^2 \frac{2J+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \sqrt{m+1}} \left(|d|^2 P_2(x) \right)^m P_J(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Rezultatul final este:

$$\langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{P} | \phi_{JM}^{(g)} \rangle = C_{M0M}^{J2J} C_{000}^{J2J} d \frac{\mathcal{I}_J^{(0)}}{I_J^{(0)}}, \quad (4.39)$$

unde am notat:

$$\mathcal{I}_J^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|d|^{2m}}{m! \sqrt{m+1}} \mathcal{S}_{mJ}. \quad (4.40)$$

Aplicând o metodă similară dar pentru \hat{P}^2 , se obține rezultatul final:

$$\langle \phi_{JM}^{(g)} | \hat{P}^2 | \phi_{JM}^{(g)} \rangle = C_M^J d^2 \frac{T_J^{(0)}}{I_J^{(0)}}, \quad (4.41)$$

cu

$$C_M^J = \sum_{J'=0,2,4} C_{000}^{22J'} C_{000}^{J'J} C_{M0M}^{JJ'} \sum_{\mu} C_{\mu-\mu 0}^{22J'}, \quad T_J^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|d|^{2m}}{m! \sqrt{(m+1)(m+2)}} \mathcal{S}_{mJ}. \quad (4.42)$$

Având expresiile pentru valorile așteptate ale lui \hat{P} și \hat{P}^2 , dispersia lui P este ușor obținută

$$\left(\Delta\hat{P}\right)_{JM}^2 = \langle\phi_{JM}^{(g)}|\hat{P}^2|\phi_{JM}^{(g)}\rangle - \left(\langle\phi_{JM}^{(g)}|\hat{P}|\phi_{JM}^{(g)}\rangle\right)^2. \quad (4.43)$$

Deși calculul mediei lui $\hat{\Phi}$ este destul de dificilă, este posibil. Conform Ref. [9] inegalitatea incertitudinii Heisenberg este satisfăcută de dispersiile lui \hat{N} și

$$(D\hat{P})_{JM} = \frac{(\Delta\hat{P})_{JM}}{|\langle\phi_{JM}^{(g)}|\hat{P}|\phi_{JM}^{(g)}\rangle|}. \quad (4.44)$$

Astfel deplasarea de la limita clasică este măsurat de $(\Delta\hat{N})_J(D\hat{P})_{JM}$. $(\Delta\hat{N})_J(D\hat{P})_{JM}$.

C. Relații de incertitudini pentru \hat{N} și $\hat{C}^2 + \hat{S}^2$

Valorile așteptate ale operatorilor Hermitici \hat{C} și \hat{S} , definiți de:

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{P} + \hat{P}^\dagger), \quad \hat{S} = \frac{1}{2i}(\hat{P} - \hat{P}^\dagger) \quad (4.45)$$

sunt ușor obținute din Ec. (4.39) și (4.41) ca

$$\langle\phi_{J0}^{(g)}|\hat{C}|\phi_{J0}^{(g)}\rangle = (C_{000}^{J2J})^2 (Re d) \frac{\mathcal{I}_J^{(0)}}{J_J^{(0)}}, \quad \langle\phi_{J0}^{(g)}|\hat{S}|\phi_{J0}^{(g)}\rangle = (C_{000}^{J2J})^2 (Im d) \frac{\mathcal{I}_J^{(0)}}{J_J^{(0)}}. \quad (4.46)$$

Urmând procedura descrisă în secțiunea precedentă obținem:

$$\langle\phi_{J0}^{(g)}|\hat{C}^2 + \hat{S}^2|\phi_{J0}^{(g)}\rangle = |d|^2 \sum_{J'} \left(C_{000}^{J2J'}\right)^2 \frac{\mathcal{U}_{J'}^{(0)}}{I_J^{(0)}} + \frac{5\mathcal{U}_J^{(0)}}{2I_J^{(0)}}, \quad (4.47)$$

cu

$$\mathcal{U}_J^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d|^{2k}}{(k+1)!} S_{kJ}. \quad (4.48)$$

Suma normată a dispersiilor asociate celor două observabile \hat{C} și \hat{S} este:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta\hat{C})_{J0}^2 + (\Delta\hat{S})_{J0}^2}{\langle\hat{C}\rangle_{J0}^2 + \langle\hat{S}\rangle_{J0}^2} &= \frac{1}{|d|^2 (C_{000}^{J2J})^4} \left[|d|^2 \sum_{J'} \left(C_{000}^{J2J'}\right)^2 \frac{\mathcal{U}_{J'}^{(0)} I_J^{(0)}}{(\mathcal{I}_J^{(0)})^2} + \frac{5\mathcal{U}_J^{(0)} I_J^{(0)}}{2(\mathcal{I}_J^{(0)})^2} \right] - 1 \\ &\equiv (\Delta R)_{J0}^2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

unde indicele inferior $J0$ indică faptul că dispersiile implicate și valorile mediei corespund stării proiectate după moment cinetic $\phi_{J0}^{(g)}$. Deasemenea notația $\langle\hat{O}\rangle_{J0}$ a fost folosită pentru valoarea medie a lui \hat{O} cu starea proiectată menționată.

Relația de incertitudine asociată la cele două observabile este obținută egaland

$$F_J = (\Delta\hat{N})_J \sqrt{\frac{(\Delta\hat{C})_{J0}^2 + (\Delta\hat{S})_{J0}^2}{\langle\hat{C}\rangle_{J0}^2 + \langle\hat{S}\rangle_{J0}^2}} \quad (4.50)$$

cu produsul părților drepte a Ec. (4.36) și $(\Delta R)_J$ dat de (4.49). Deplasarea lui F față de valoarea $1/2$ constituie o măsură pentru natura cuantică a comportării sistemului.

V. ANALIZĂ NUMERICĂ

Începem prin a da coeficienții dezvoltării lui Ψ corespunzători la baze bosonice diferite:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_n C_n |n\rangle, \\ |\Psi\rangle &= \sum_J C_{J0} |J0\rangle, \\ |\Psi\rangle &= \sum_{NJ} C_{NJ0} |NJ0\rangle. \end{aligned} \quad (5.1)$$

unde $|n\rangle$ sunt stările proprii ale operatorului număr bosonic $b_{20}^\dagger b_{20}$, iar cu $|J0\rangle$ se notează stările proprii ale momentului cinetic la pătrat, \hat{J}^2 , și a proiecției sale pe axa z , J_z . A treia bază $|NJ0\rangle$ este determinată de numerele cuantice: numărul bosonic N , momentul cinetic J , și proiecția z a momentului cinetic, 0 .

Folosind rezultatele descrise înainte, se găsește că ponderile dezvoltării au următoarele expresii analitice

$$C_n = e^{-d^2/2} \frac{d^n}{\sqrt{n!}}, \quad C_{J0} = \left(N_J^{(g)}\right)^{-1}, \quad C_{NJ} = (\mathcal{N}_{NJ})^{-1}. \quad (5.2)$$

. Aceste ponderi au fost plotate în Fig. 1(a)-1(c), în funcție de parametrul de deformare d . De aici observăm că pentru d mic unele ponderi se anulează, ceea ce înseamnă că stările corespunzătoare lipsesc din dezvoltare. Curbele au maxime pentru unele deformări, ceea ce arată că pentru astfel de deformări stările corespunzătoare, ce apar în dezvoltare, sunt componente dominante. Produsul dispersiei coordonatelor conjugate $\hat{\alpha}_{20}$ și $\hat{\pi}_{20}$ calculat cu stările J -proiectate este prezentat în funcție de d în Fig. 2(c). Este bine cunoscut că limita clasică a acestei mărimi este $1/2$ (în unități \hbar). Conform Fig. 2(c) starea proiectată $J = 0$ este singura stare proiectată care se comportă semiclassical în regiunea lui d mic (≤ 1.5). Stările rămase se stabilesc în afara limitei clasice. Cu cât valoarea lui J este mai mare, cu

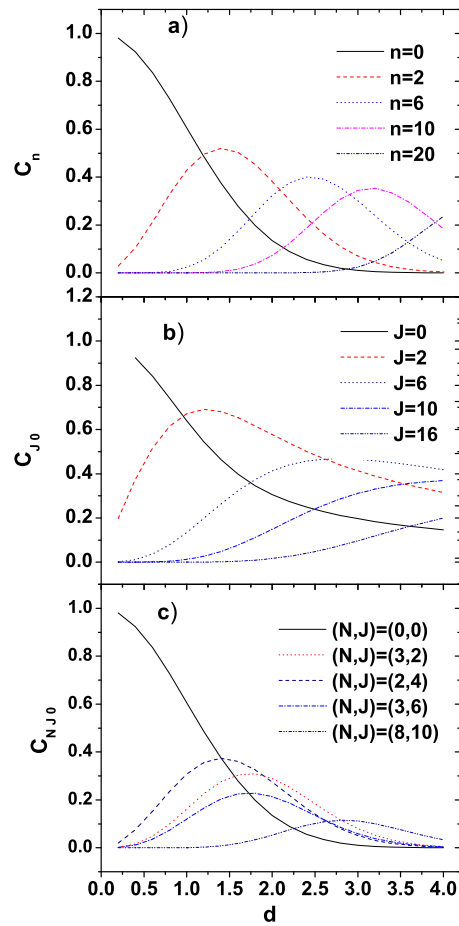


FIG. 1: Coeficientii dezvoltarii functiei coerente, $|\Psi\rangle$, in trei baze distincte, $|n\rangle$ (panel a)), $|J0\rangle$ (panel b), si $|NJ0\rangle$ (panel c), sunt prezentati in functie de parametrul de deformare d .

atât mai mare este deplasarea de la limita clasică. În regiunea lui d (> 3) mare deplasarea de la limita clasică este o funcție de d crescătoare, indiferent de valorile lui J . Această tendință este determinată de natura crescătoare a dispersiei lui $\hat{\alpha}_{20}$. Astfel pentru ambele coordonate conjugate menționate mai sus, deformarea nucleară favorizează comportarea cuantică a sistemului. După cum deja am menționat Ψ rupe două simetrii: gauge și rotațională. Până acum am analizat funcția de undă care restabilește simetria rotațională. În Fig. 3 am reprezentat produsul dispersiilor lui $\hat{\alpha}_{20}$ și $\hat{\pi}_{20}$ în funcție de d , folosind stările $|NJM\rangle$, care restabilesc ambele simetrii menționate mai sus. După cum se vede în Fig. 3, produsul dispersiei are o dependență puternică de J pentru valori mici ale lui d în timp ce pentru valori mari ale lui d , i.e., în limita rotațională, acesta tinde către limita clasică. Contrar cazului funcției J -proiectate, aici creșterea lui d favorizează comportarea clasică. Acest

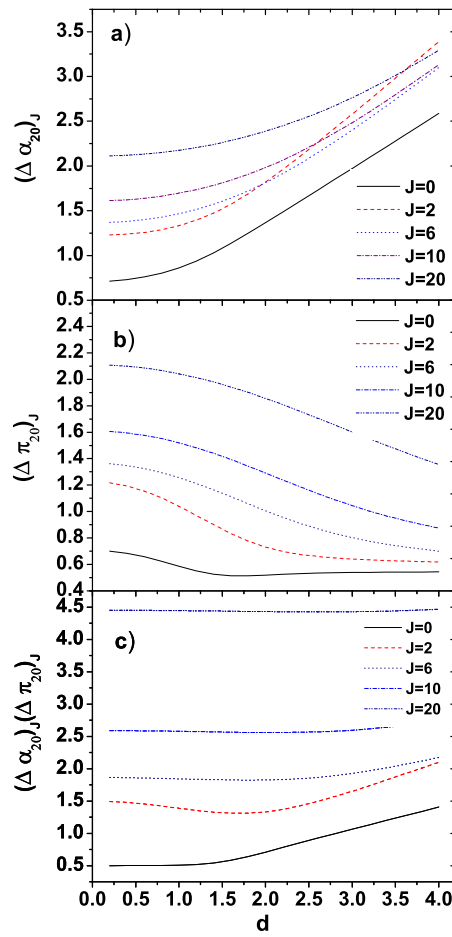


FIG. 2: Dispersiile coordonatelor conjugate α_{20} si π_{20} , sunt date in panelele a) si b) respectiv, ca functie de d . Produsul celor doua dispersii este prezentat in panelul c) ca functie de d . Cele trei marimi corespund la functiile de unda proiectate dupa momentul cinetic.

lucru este reflectat în dependența descrescătoare de J a produsului dispersiei cât și în apropierea de limita clasică. Este motivată adresarea întrebării dacă proprietățile menționate mai sus depind de alegerea perechii de coordonate conjugate. Încercăm să oferim nu un răspuns general ci să analizăm, pentru comparare, ce se întâmplă când perechea de variabile conjugate este (\hat{N}, \hat{P}) . Rezultatele sunt prezentate în Fig. 4(a)-4(c). Dispersia lui N crește cu d și despicarea datorată dependenței de J crește ușor de la zero într-un interval îngust. De reținut că pentru d tinzând la zero funcția proiectată $\phi_{JM}^{(g)}$ trece la starea $|\frac{J}{2}, \frac{J}{2}, 0, J, M\rangle$ [6] cu notația standard $N\nu, \lambda, J, M\rangle$, unde N este numărul de bosoni, J este momentul cinetic, și M este proiecția pe axa z în sistemul laboratorului.

Astfel, în limita sferică N devine un număr cuantic bun și dispersia se anulează. Prin contrast, dispersia normală $D(P)$ are o împrăștiere mare după J pentru valori

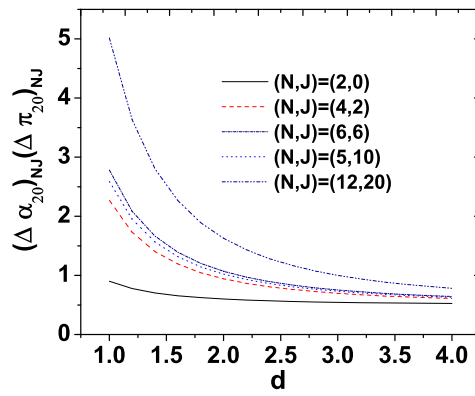


FIG. 3: Produsul dispersiilor coordonatelor conjugate $\hat{\alpha}_{20}$ and $\hat{\pi}_{20}$, corespunzand starilor NJ , sunt prezentate ca functie de d .

mici ale lui d dar pentru deformări mari dispersiile $J \neq 2$ ating o valoare comună. De remarcat că, în afară de aspecte cantitative, produsul dispersiei păstrează aspectul lui ΔN . Comportarea perechii de coordonate (N, R) este vizualizată în Fig. 5(a)-5(c). Despicierea dispersiilor R datorată dependenței lor de J este destul de mare pentru deformare mică și este decrescătoare cu d . Situația când dispersia lui R_J cu $J \neq 2$ are o valoare comună este realizată pentru d mai mare decât valoarea maximă arătată în Fig. 4. Relația de incertitudine pentru perechea (N, R) este arătată în plotul lui F_J (4.50) în funcție de d . Se observă că deplasare de la limita clasică este o funcție crescătoare de moment cinetic. Deasemenea această funcție este crescătoare cu deformarea nucleară. Trebuie menționat că, pentru deformare mare, valorile $J \neq 2$ nu se deosebesc.

VI. CONCLUZII

Enumerăm aici rezultatele obținute în capitolele precedente. Ponderile dezvoltării stărilor coerente în trei baze diferite manifestă maxime când sunt reprezentate în funcție de parametrul de deformare d . Cu cât sunt mai mari numerele cuantice alese cu atât mai mare este deformarea pentru care ponderea este maximă.

În reprezentarea (α, π) doar starea proiectată $J = 0$ se comportă clasic și asta se întâmplă pentru valori mici ale lui d . În regiunea lui d mare îndepărtarea de comportarea clasică este ușor crescătoare cu deformarea.

Comportarea perechii de coordonate conjugate (α, π) într-o stare NJ -proiectată este diferită de cea descrisă mai sus pentru o stare J -proiectată. Într-adevăr, din Fig. 3 observăm că proprietățile cuantice predomină pentru deformare mică, în timp ce pentru limita rotațională a lui d mare relația Heisenberg asociată se apropie

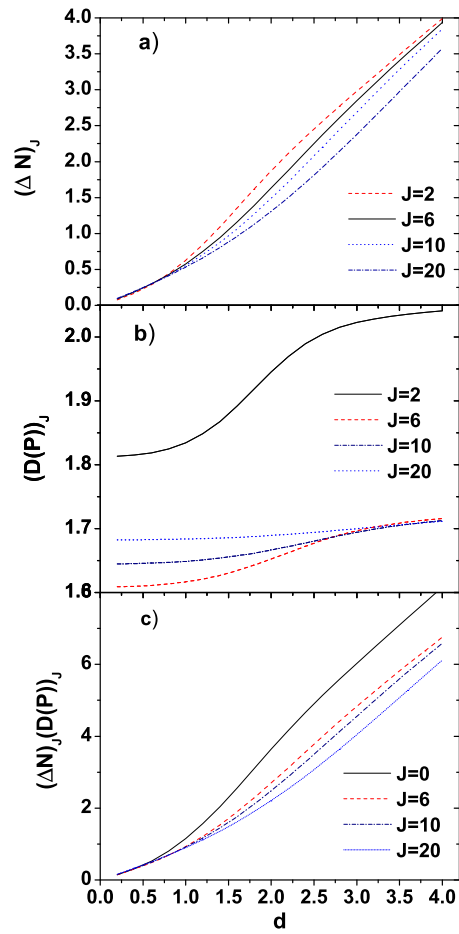


FIG. 4: Dispersiile coordonatelor conjugate, operator numar de bozoni (panel a)) si operatorul de faza P (panel b)) sunt reprezentate ca functie de d . De asemenea produsul dispersiilor este dat in panelul c). Calculele sunt efectuate pentru stările proiectate.

de limita clasică. Deasemenea, în această limită dependența de J a relațiilor de incertitudine este foarte mică.

Din Fig. 2(c) și 3 concluzionăm că în reprezentarea (α, π) și a stărilor J -proiectate sistemul se îndepărtează de imaginea clasică crescând d în timp ce pentru stările (N, J) proiectate cu cât deformarea este mai mare cu atât sistemul este mai apropiat de comportarea clasică. În ambele cazuri regiunea deformării mici este caracterizată de o comportare cuantică reflectată de îndepărtarea de limitele clasice cât și de depicarea produsului dispersiei datorată dependenței de J . Comparând figurile corespunzătoare relațiilor de incertitudine pentru (α, π) în cazul stărilor J -proiectate, respectiv, NJ -proiectate, putem concluziona că împărțirea proprietăților clasice și cuantice depinde de simetria funcției de undă. În situații specifice cu cât sistemul este mai simetric comportarea sa este mai apropiată de imaginea clasică.

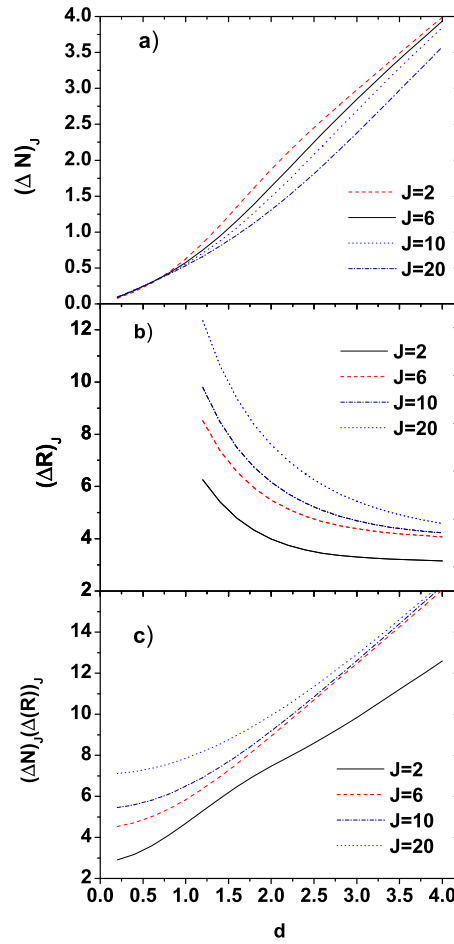


FIG. 5: Dispersiile corespunzatoare operatorului numar de bozoni (panel a)) si observabilei \hat{R} definita de 4.49 (panel b)) ca functie de d . Produsul dispersiilor este dat in panelul c). Calculele sunt efectuate pentru stările proiectate. Momentele cinetice sunt cele mentionat in legenda.

Problema delicată a numărului bosonic și fazei conjugate a fost tratată prin două alegeri alternative pentru operatorul fază conjugat. În primul caz operatorul este \hat{P} cu o normare proprie. Deși acesta nu este un operator Hermitic relația de incertitudine Heisenberg este valabilă pentru un număr mare de bosoni. Produsul dispersiei este rapid crescător cu d începând de la valori apropiate de zero (≈ 0.162). Comportarea pentru deformare mică este justificată de faptul că starea J -proiectată devine o stare proprie a lui \hat{N} . Pentru d mai mare sistemul se comportă într-un mod clasic în timp ce pentru deformare mare predomină proprietățile clasice. Depicarea produsului dispersiei datorită dependenței sale de J nu este semnificativă pentru $J \neq 2$. Putem spune că deși îndepărtarea de limita clasică a produsului dispersiei este mare proprietatea clasică ”reclaiming a weak J dependence still persists”. Produsul dispersiei este crescător cu d și este deasemenea independent de J

pentru valori mari ale lui J .

Pentru a doua situație alternativă operatorii fază \hat{C} și \hat{S} au fost folosiți pentru a defini, din dorința de a avea o formă simetrică, dispersia observabilei R . Produsul dispersiei notat cu F_J este crescător cu d . Pentru d mic despicarea după J este mare în timp ce pentru deformare mare valorile lui F_J pentru J mare sunt aproximativ la fel. Aici, cât și în cazul coordonatelor (α, π) , dispersia coordonatei este crescătoare cu d , în timp ce dispersia impulsului conjugat este descrescătoare când d crește.

Comparând rezultatele pentru coordonatele (α, π) și (N, P) sau (N, R) observăm că interdependența proprietăților clasice și cuantice depinde de perechea coordonatelor conjugate considerate.

Înainte ca simetriile să fi fost restabilite sistemul se comporta clasic, lucru reflectat de relațiile de incertitudine ce-și ating minimele, independent de alegerea perechii de coordonate conjugate. Mai mult, valoarea așteptată pentru momentul cinetic la pătrat are o valoare continuă [6]

(6.1)

Proiecția simetriei conduce la o dependență de J (sau NJ) pentru relațiile de incertitudine, care este mare pentru deformare mică. Crescându-l pe $|d|$, sistemul tinde să recupereze comportarea clasică.

Principalele concluzii ale investigațiilor noastre sunt următoarele:

(i) În sistemul de referință intrinsec, unde stările neproiectate sunt folosite, sistemul se comportă clasic independent de alegerea variabilelor conjugate.

(ii) Deasemenea, momentul cinetic este o variabilă clasică continuă, după cum reiese din Eq. (6.1).

(iii) În baza proiectată $|NJM\rangle$ produsul dispersiei pentru α_{20} și π_{20} revendică o comportare clasică pentru deformare mare unde limita clasică este dată pentru fiecare valoare a lui J .

(iv) Privind perechea de coordonate (N, R) , după cum este arătat în Fig. 5, sistemul se comportă clasic doar în stări de spin înalt, deși produsul dispersiei este departe de valoarea clasică. Totuși, pentru deformare mare și spin înalt dependența de J dispare.

(v) Pentru deformare mică proprietățile cuantice predomină pentru ambele perechi de coordonate conjugate considerate.

(vi) Restabilirea simetriilor rotațională și gauge este o procedură pur cuantică care conduce la a avea o pronunțată comportare cuantică pentru deformare mică.

(vii) Având în vedere că deformarea însăși este o variabilă clasică, creșterea valorii sale diminuează proprietățile cuantice în favoarea celor clasice. În această privință

putem spune că deformarea joacă rolul mediator între comportările clasice și cuantice.

(viii) Împărțirea proprietăților clasice și cuantice depinde de simetria funcției de undă. În anumite situații considerate aici, cu cât sistemul este mai simetric comportarea sa este mai apropiată de imaginea clasică, în regimul deformării mari.

(ix) În cele din urmă, putem spune că lucrarea de față completează studiile noastre anterioare asupra stărilor proiectate corespunzătoare stării coerente $|\Psi\rangle$.

Acknowledgment. This work was supported by the Romanian Ministry for Education Research Youth and Sport through the CNCSIS project ID-2/5.10.2011.

-
- [1] M. Baranger and M. Veneroni, Ann. Phys. (NY) **114**, 123 (1978).
 - [2] F. Villars, Nucl. Phys. **A285**, 269 (1977).
 - [3] A. A. Raduta, V. Baran and D. S. Delion, Nucl. Phys. **A588**, 431 (1995).
 - [4] A. A. Raduta, R. Budaca and Amand Faessler, Jour. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **38**, 055102 (2011).
 - [5] A. A. Raduta and R. M. Dreizler, Nucl. Phys. **A258**, 109 (1976).
 - [6] A. A. Raduta, V. Ceausescu, A. Gheorghe and R. M. Dreizler, Nucl. Phys. **A381**, 253 (1982).
 - [7] P. Haapakoski, T. Honkaranta and P. O. Lipas, Phys. Lett. **41 B**, 125 (1970).
 - [8] A.S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, 2nd edition, Edizioni della Normale, Pisa, 2011, ISBN: 978-88-7642-375-8 Nauka, Moscow, 1980, Russian translation, pp. 204-211.
 - [9] P. Carruthers and M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. **14**, 387 (1965).
 - [10] P. Carruthers and Michael Martin Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968).
 - [11] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A114**, 243 (1927).
 - [12] L. Susskind and J. Glogow, Physics **1**, 49 (1964).
 - [13] W. H. Louisell, Phys. Lett. **7**, 60, (1963).
 - [14] R. D. Levine, The Journal of Chemical Physics, **44**, 3597 (1965).
 - [15] A. A. Raduta, R. Budaca and Amand Faessler, Ann. Phys.[NY] **327**, 671 (2012).