SINTEZA LUCRARII

Rezultatul cel mai relevant al proiectului consta in contributiile originale in constructia reprezentarilor unitare ireductibile olomorfe ale grupurilor Jacobi bazate pe domenii Siegel-Jacobi [3]. Prin cuantificare geometrica, aceste domenii sunt realizate ca orbite Kähler de stari coerente asociate unei largi familii de reprezentari ale unor grupuri de simetrie cu importante aplicatii in mecanica cuantica, in particular in fizica nucleara. Aceste grupuri sunt cunoscute in literatura matematica ca grupuri Jacobi si se realizeaza ca produse semidirecte ale unor grupuri semisimple de tip hermitian cu grupuri Heisenberg [5], [19]-[21]. Aceste grupuri semisimple sunt asociate unor domenii simetrice hermitiene care sunt aplicate in semispatiul superior Siegel prin aplicatii olomorfe echivariante [17]. Domeniile Siegel-Jacobi sunt asociate grupurilor Jacobi prin scufundari de tip Harish-Chandra [3]. Pentru precizie se va utiliza expresia " reprezentari unitare pe un spatiu Hilbert" pentru a intelege expresia "reprezentari unitare continui pe un spatiu Hilbert complex separabil". In acord cu Bargmann si Wigner, un grup de simetrie este un grup Lie conex si simplu conex care se caracterizeaza in mecanica cuantica prin reprezentari unitare ireductibile pe un spatiu Hilbert. Familia de grupuri Jacobi considerata in [3] completeaza si corecteaza clasificarea lui Lisiecki si Neeb [9], [11] pentru grupurile de simetrie unimodulare care admit reprezentari de stari coerente bazate pe orbite Kähler.

Diverse reprezentari unitare ireductibile ale grupurilor Jacobi au fost construite de Berndt, Böcherer, Schmidt, and Takase [5], [4], [19]-[21] cu aplicatii remarcabile la formele Jacobi, forme automorfe, functii sferice, functii teta, operatori Hecke si varietati fibrate Kuga [17], [15],[5], [25]. Aceste aplicatii au fost partial preluate in fizica teoretica si fizica matematica.

Printre grupurile Jacobi si subgrupurile sale se regasesc grupuri de transformari canonice si grupuri de simetrie de tip oscilator, in particular pentru modelele colective nucleare: modelul Bohr-Mottelson, modelul CSM si modelul CM3. Diverse reprezentari infinitezimale de stari coerente bazate pe domenii Siegel-Jacobi au fost investigate in cadrul mecanicii cuantice, fizicii nucleare si opticii cuantice. Prima realizare infinitezimala scalara au obtinut-o Kramer si Saraceno [7], prima realizare infinitezimala vectoriala a fost obtinuta de Quesne [13], iar prima reprezentare de stari coerente a fost obtinuta de Shuman [18].

Pentru aplicatii explicite s-a considerat grupul Jacobi G_n^J definit ca produs semidirect al grupului simplectic $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ cu grupul Heisenberg de dimensiune $2n+1$. Domeniile Siegel-Jacobi asociate grupului G_n^J sunt spatiul Siegel-Jacobi $\mathfrak{H}_n^J$ si discul Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$ [23], [24]. Exista o aplicatie biolomorfa de la $\mathfrak{D}_n^J$ pe $\mathfrak{H}_n^J$, numita transformare Cayley partiala.

Rezultatul cel mai semnificativ al lucrarii consta in constructia reprezentarilor unitare ireductibile scalare ale grupului Jacobi G_n^J pe spatii Hilbert de functii olomorfe pe discul Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$.

In acest context, principalele contributii originale ale lucrarii sunt urmatoarele:

1) Grupurile Jacobi sunt grupuri unimodulare algebrice de tip Harish-Chandra. Utilizand teoria grupurilor de tip Harish-Chandra s-au generalizat rezultatele lui Satake, Takase si Lee obtinand formule explicite pentru factorii automorfi canonici si pentru functiile nucleu canonice ale tuturor grupurilor Jacobi si domeniilor Siegel-Jacobi associate (Teorema 2.1,formulele (2.6) si (2.8) din [3].) S-au obtinut formule compacte in cazul spatiului Siegel-Jacobi $\mathfrak{H}_n^J$ si in cazul discului Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$ (factorii automorfi (2.14) si (2.25), nucleele canonice (2.15) si (2.26) din [3]) . Rezultatele permit constructia explicita a seriilor discrete olomorfe pentru toate grupurile Jacobi.

2. S-a construit seria discreta olomorfa scalara a grupului Jacobi G_n^J pe discul Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$ (Propozitia 4.1 din [3]). S-au obtinut tansformari unitare explicite intre reprezentarile acestei serii si reprezentarile seriei discrete olomorfe scalare a grupului Jacobi pe spatiul Siegel-Jacobi $\mathfrak{H}_n^J$ (Propozitia 4.1 din [3]). S-au construit baze ortonormate de polinoame pentru spatiile de reprezentare ale seriei discrete olomorfe scalare a grupului Jacobi pe discul Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$ (Propozitia 4.2 din [3]). Aceste baze sunt importante pentru dezvoltarea analizei armonice pe $\mathfrak{D}_n^J$, in special pentru studiul ecuatiilor diferentiale ale modelelor cuantice.

3. S-au construit baze ortonormate explicite de polinoame pentru spatiile Fock-Satake $\mathcal{F}_{mW}$, unde W este un element fixat arbitrar in discul Siegel, iar m este un caracter central netrivial (Propozitia 3.1 din [3]). Aceste spatii au fost introduse de Satake [14], [16]. Spatiul Bargmann se obtine pentru $W = 0$ [1].

4. S-a introdus un *nou* spatiu Fock $\mathfrak{F}_m$ format din functii olomorfe pe $\mathfrak{D}_n^J$ care satisfac un sistem de ecuatii diferentiale specific (sunt in nucleul unui operator de tip "heat"). S-a construit o baza ortonormata explicita de polinoame si pentru spatiul $\mathfrak{F}_m$ (Propozitia 3.2 din [3]). Spatiile Fock $\mathcal{F}_{mW}$ si $\mathcal{F}_m$ sunt unitar izomorfe si pe ele actioneaza reprezentari Weil-Jacobi unitar echivalente. Cazul $n = 1$ a fost tratat in [2].

5. Starile coerente pentru toate spatiile de reprezentare mentionate anterior sunt determinate de nucleele reproducatoare care au fost explicit construite (formulele (4.4) si (4.10) din [3]; dezvoltarile explicite ale nucleelor reproducatoare sunt date de formulele (3.12), (3.20) si (4.21) din [3]).

Rezultatul principal din [3], constructia reprezentarilor unitare ireductibile olomorfe scalare ale grupului Jacobi G_n^J bazate pe discul Siegel-Jacobi $\mathfrak{D}_n^J$, este nou, original si important. Rezultatul in cazul particular $n = 1$ a fost obtinut de Böcherer and Schmidt si este considerat unul dintre cele mai importante din teeoria reprezentarilor grupului Jacobi. Rezultatul din lucrare nu este o simpla generalizare deoarece se bazeaza pe o metoda noua care permite constructia explicita a seriilor olomorfe discrete ale tuturor grupurilor Jacobi utilizand formulele explicite pentru factorii automorfi canonici si pentru functiile nucleu canonice obtinute [3]. In esenta, aceasta constructie geometrica determina cuantificarea geometrica a sistemelor dinamice avand grupurile de simetrie date de grupurile Jacobi. Mai mult, starile coerente pentru spatiile de reprezentare

sunt determinate de nuclee reproducatoare explicite. In acest context se spera ca lucrarea va avea un impact stiintific puternic atat in teoria reprezentarilor grupurilor, cat si in teoria sistemelor cuantice cu simetrie incluzand si modelele colective nucleare. Rezultatele din [3] conduc la rezolvarea a doua probleme importante.

Clasificarea reprezentarilor de stari coerente bazate pe orbite Kähler

Se interpreteaza constructia geometrica a reprezentarilor unitare ale grupurilor Jacobi bazate pe domenii Siegel-Jacobi in limbajul starilor coerente [12].

Se noteaza cu $Q(H)$ spatiul operatorilor de proiectie unidimensionali ai spatiului Hilbert H. Se noteaza cu $P[\psi]$ elementul din $Q(H)$ determinat de $\psi \in H\backslash\{0\}$. Elementele din $Q(H)$ se pot considera fie ca stari normale pure ale algebrei von Neumann algebra de operatori marginiti pe H, fie ca stari pure ale algebrei C^* de operatori compacti pe H [6]. Spatiul Hilbert proiectiv $P(H)$ este format din toate subspatiile liniare complexe ale spatiului Hilbert H. Spatiul $P(H)$ este o varietate Kähler relativ la metrica uzuala Fubini-Study [6]. Spatiul $Q(H)$ cu topologia relativa w^* si spatiul $P(H)$ cu topologia de varietate sunt homeomorfe. Se identifica $Q(H)$ si $P(H)$.

Se adopta si se extinde o definitie intrinseca a reprezentarilor de stari data in [10]. Fie G un grup Lie conex si simplu conex, iar $\mathfrak{X}$ un G -spatiu omogen care admite o masura invarianta $\mu_{\mathfrak{X}}$. Fie π o reprezentare unitara ireductibila a grupului G in spatiul Hilbert H. O familie $E = \{E_x | x \in \mathfrak{X}\}$ de operatori de proiectie unidimensional in H este numita un π-sistem de stari coerente bazata pe $\mathfrak{X}$ daca: 1) $E_{g\,x} = \pi\,(g) E_x \pi\,(g)^{-1}$ pentru orice $g \in G$ si $x \in \mathfrak{X}$; 2) exista $\psi \in H\backslash\{0\}$ astfel incat $\int_{\mathfrak{X}} |\langle \psi, \pi\,(g)\psi\rangle|^2 \, d\,\mu_{\mathfrak{X}} < \infty$. Atunci reprezentare π este numita o reprezentare de stari coerente simplectica (Kähler) daca E and $\mathfrak{X}$ sunt varietati smplectice (Kähler) izomorfe, iar E este o subvarietate simplectica (Kähler) a spatiului $Q(H)$. Moscovici si Verona au studiat reprezentarile de stari coerente bazate precis pe orbite coadjuncte asociate in the sensul cuantificarii geometrice [10]. Sistemele de stari coerente de tip Schrödinger pentru grupul Heisenberg cu centrul unidimensional, realizate pe spatii Fock de functii olomorfe au fost obtinute de Bargmann [1], Satake [14], [16], [17], si Lee [8]. Reprezentarea se extinde la reprezentarea Schrödinger-Weil a grupului de acoperire simplu conex a grupului Jacobi.

Lisiecki si Neeb au investigat unele reprezentari de stari coerente Kähler ale grupurilor Heisenberg si Jacobi cu centrul unidimensional [9], [11]. Este important de amintit ca Lisiecki and Neeb au clasificat grupurile unimodulare nesemisimple care admit reprezentari de stari coerente bazate pe orbite Kähler. In acord cu [3], aceasta clasificare nu este completa deoarece nu contine familia grupurilor Jacobi cu dimensiunea centrului mai mare ca 1, familie importanta in teoria teoria numerelor si in analiza armonica [22]. Incluzand toate grupurile Jacobi din [3], clasificarea se completeaza.

Grupurile unimodulare care admit reprezentari de stari coerente Kähler sunt de urmatoarele tipuri: (1) grupuri compacte; (2) grupuri necompacte semisimple

de tip hermitian; (3) grupuri Heisenberg; (4) produse semidirecte de grupuri compacte cu grupuri Heisenberg; 5) grupuri Jacobi.

2) Globalizarea formalismelor de stari coerente cu parametrizare complexa

Formalismele de stari coerente cu parametrizare complexa pentru grupuri necompacte de simetrie (de exemplu principiul variational dependent de timp si decuantificarea Berezin) se realizeaza in general pentru reprezentari unitare ireductibile infinitezimale ale grupului de simetrie. Prin globalizare se intelege extinderea in sensul cuantificarii geometrice a acestor reprezentari la reprezentari unitare ireductibile olomorfe ale grupului de simetrie bazate pe varietati Kähler care contine spatiul parametrilor. Numai prin globalizare, formalismele de stari coerente cu parametrizare complexa admit o interpretare riguroasa in sens de observabile, fara ambiguitati si contradictii, iar sistemele dinamice cuantice corespunzatoare se pot descrie prin operatori diferentiali globali asociati prin decuantificare ecuatiilor de miscare cu solutii pe intreg spatiul fazic. Grupurile de simetrie care admit globalizare in acest context sunt cele asociate clasificarii reprezentarilor de stari coerente bazate pe orbite Kähler data anterior.

Cel mai semnificativ impact din punct de vedere academic consta in formarea tinerilor cercetatori care vor avea posibilitatea de a elabora modele noi de structura nucleara bazate pe teoria reprezentarilor grupurilor de simetrie si pe metoda starilor coerente, cu suport conceptual si cu posibilitatea obtinerii de rezultate riguroase si explicite. Unele modele analitice din obiectivele proiectului se pot dezvolta si pot atrage studentii, masteranzii si doctoranzii.

References

[1] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 187–214.

[2] S. Berceanu, A. Gheorghe, *Applications of the Jacobi group to Quantum Mechanics*, Romanian Journal of Physics 53, 9-10 (2008), 1013–1021.

[3] S. Berceanu, A. Gheorghe, *On the geometry of Siegel-Jacobi domains,* Balkan Journal of Geometry and Its Applications (submisa 16 Nov 2010); lucrare in arXiv:1011.3317; paper presented at the the International Conference "Differential Geometry and Dynamical Systems", August 25-28, 2010, University Politehnica of Bucharest, Romania.

[4] R. Berndt and S. Böcherer, *Jacobi Forms and Discrete Series Representations of the Jacobi Group*, Math. Z. 204 (1990), 13–44.

[5] R. Berndt and R. Schmidt, *Elements of the representation theory of the Jacobi group*, Progress in Mathematics 163, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[6] R. Cirelli, P. Lanzavecchia and A. Manià, *Normal pure states of the Von Neumann algebra of bounded operators as Kähler manifold*, J. Phys. A: Math. Gen. 15 (1983), 3829–3835.

[7] P. Kramer and M. Saraceno, *Semicoherent states and the group* $\mathrm{ISp}(2,\mathbb{R})$, *Physics* 114A (1982), 448–453.

[8] M. H. Lee, *Theta functions on Hermitian symmetric domains and Fock representations*, J. Aust. Math. Soc. 74 (2003), 201–234.

[9] W. Lisiecki, *A classification of coherent state representations of unimodular Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 25 (1991), 37–43.

[10] H. Moscovici and A. Verona, *Coherent states and square integrable representations*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A 29 (1978), 139–156.

[11] K.-H. Neeb, *Coherent states, holomorphic extensions, and highest weight representations*, Pacific Journal of Mathematics, 174, (2) (1996), 497–542.

[12] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin, 1986.

[13] C. Quesne, *Vector coherent state theory of the semidirect sum Lie algebras* $wsp(2N,\mathbb{R})$, J. Phys. A: Gen. 23 (1990), 847–862.

[14] I. Satake, *Fock Representations and Theta Functions*, Ann. Math. Studies 66 (1971), 393–405.

[15] I. Satake, *Unitary representations of a semi-direct products of Lie groups on* $\bar{\partial}$*-cohomology spaces*, Math. Ann. 190 (1971), 177–202.

[16] I. Satake, *Factors of Automorphy and Fock Representations*, Advances in Math. 7 (1971), 83-110.

[17] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Publ. Math. Soc. Japan 14, Princeton Univ. Press 1980.

[18] K. Shuman, *Complete signal processing bases and the Jacobi group,* J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 203–213.

[19] K. Takase, *A note on automorphic forms*, J. reine angew. Math. 409 (1990), 138-171.

[20] K. Takase, *On unitary representations of Jacobi groups*, J. reine angew. Math. 430 (1992), 130–149.

[21] K. Takase, *On Siegel Modular Forms of Half-integral Weights and Jacobi Forms*, Trans. of American Math. Soc. 351 No. 2 (1999), 735–780.

[22] J.-H. Yang, *The method of orbits for real Lie groups*, Kyungpook Math. J. 42 (2) (2002), 199–272.

[23] J.-H. Yang, *Invariant metrics and Laplacians on the Siegel-Jacobi spaces*, Journal of Number Theory, 127 (2007), 83–102.

[24] J.-H. Yang, *A partial Cayley transform for Siegel-Jacobi disk*, J. Korean Math. Soc. 45(3) (2008), 781–794.

[25] C. Ziegler, *Jacobi Forms of Higher Degree*, Abh. Math. Sem. Hamburg 59 (1989), 191–224.